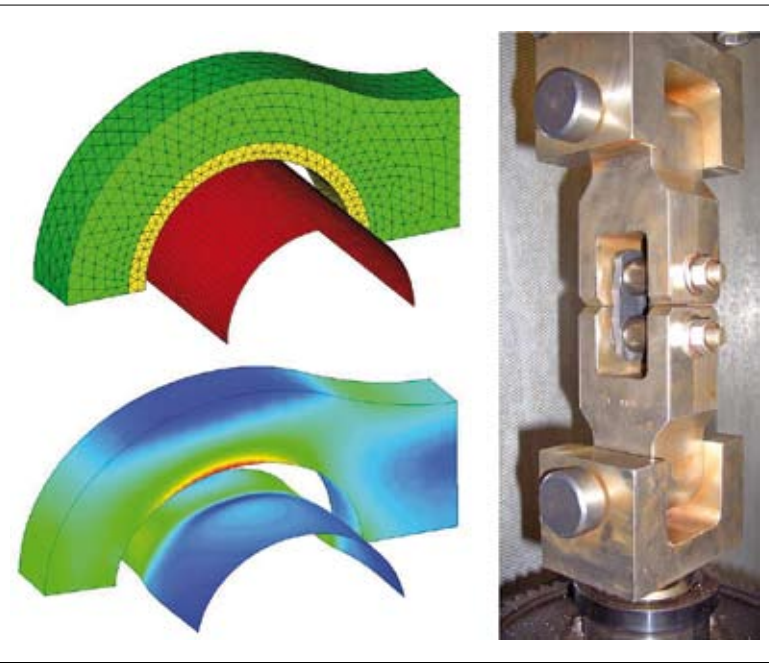


Gestaltoptimierung der Innenlasche einer Rollenkette

Spannungsminimierung bei verschiedenen Spline-Parametrisierungen



Christian Brecher, Marcel Seiler

Zur Erhöhung der Dauerfestigkeit einer Rollenkette wurde eine Gestaltoptimierung der stark beanspruchten Innenlaschen vorgenommen. Ziel war die Approximation der optimalen Bauteilgeometrie in Bezug auf die definierten Ziele und Randbedingungen. Da die Genauigkeit der Approximation entscheidend von der Flexibilität der verwendeten Parametrisierung abhängt und in Konflikt zur Berechnungszeit steht, wurden die Innenlaschen mit verschiedenen Spline-Typen und Stützstellendichten parametrisiert.

Prof. Dr.-Ing. Christian Brecher ist Leiter des Werkzeugmaschinenlabors (WZL) der RWTH Aachen, Lehrstuhl für Werkzeugmaschinen.

Dipl.-Ing. Marcel Seiler ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am WZL der RWTH Aachen.

1 Einleitung

Kettengetriebe werden zur Drehzahl- und Drehmomentenübertragung in vielen technischen Erzeugnissen des Maschinenbaus verwendet, wie zum Beispiel in Kraftfahrzeugen, Förderanlagen und Industriegetrieben. Der Leistungsstand dieser Produkte hängt entscheidend von der Leistungsfähigkeit, Zuverlässigkeit und den Kosten moderner Kettengetriebe ab, bei denen Rollenketten (**Bild 2**) die größte Bedeutung und Verbreitung erlangt haben [1].

Neben der Verschleißfestigkeit zählt die Dauerfestigkeit zu den entscheidenden Einflussgrößen auf die Lebensdauer einer Rollenkette. Häufig führen stoßartige, dynamische Belastungen zu einem frühzeitigen Versagen der Rollenkette durch einen Dauerbruch der stark belasteten Innenlaschen. Die hohen Spannungen in den Innenlaschen sind auf die großen Lochungsdurchmesser zurückzuführen, in denen die Buchsen eingepresst werden. Dies zeigen auch Dauerfestigkeitsuntersuchungen und Berechnungen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM).

Da die Spannungen in der Innenlasche stark von der Gestalt der Außenkontur abhängen, ist deren Formoptimierung für eine signifikante Erhöhung der Dauerfestigkeit zielführend. Die Stützstellendichte und der Spline-Typ haben dabei einen wesentlichen Einfluss auf die geometrische Manipulierbarkeit der zu optimierenden Außenkontur. Je mehr Parameter bei dem Aufbau eines Splines verwendet werden, desto flexibler kann seine Form variiert werden. Da die Stützstellen der Splines als Optimierungsparameter verwendet werden, ist die für die Optimierung erforderliche Berechnungszeit erheblich von der Stützstellendichte abhängig. Es besteht also ein Zielkonflikt zwischen der Formgebungsfreiheit eines Splines und der Rechenzeit der Optimierung.

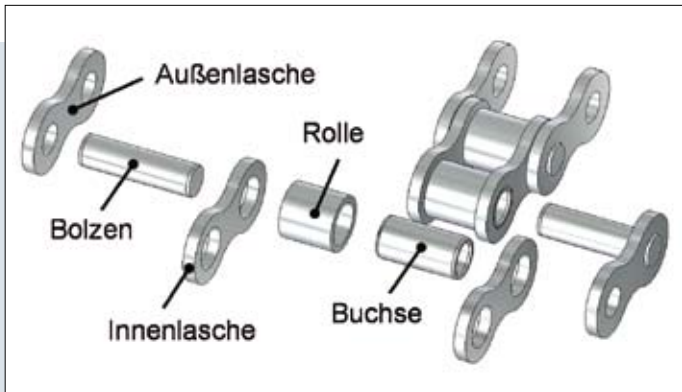
2 Aufbau der verschiedenen Spline-Typen

Die Form der Geometriebereiche kann durch eine Änderung der Spline-Parameter variiert werden. Hierfür wird eine große Flexibilität der Splines bei gleichzeitig kleiner Anzahl freier Parameter gefordert [2]. Aufgrund dieser gegensätzlichen Anforderungen haben sich in den CAD-Systemen Bézier-Kurven, B-Splines und NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) durchgesetzt, die hierzu einen guten Kompromiss bieten. Diese Splines werden über Stützstellen, Gewichtungsfaktoren und Knotenvektoren beschrieben. Die größte Flexibilität bieten NURBS, da diese auch B-Splines als Sonderfall konstanter Gewichtungsfaktoren abbilden können. NURBS und B-Splines bestehen aus mehreren Spline-Abschnitten, die einen stetigen Übergang aufweisen. Falls ein B-Spline aus nur einem Spline-Abschnitt besteht, kann dieser eine Bézier-Kurve exakt abbilden. **Bild 3** gibt eine Übersicht der Spline-Typen und ihrer Parametrisierung wieder.

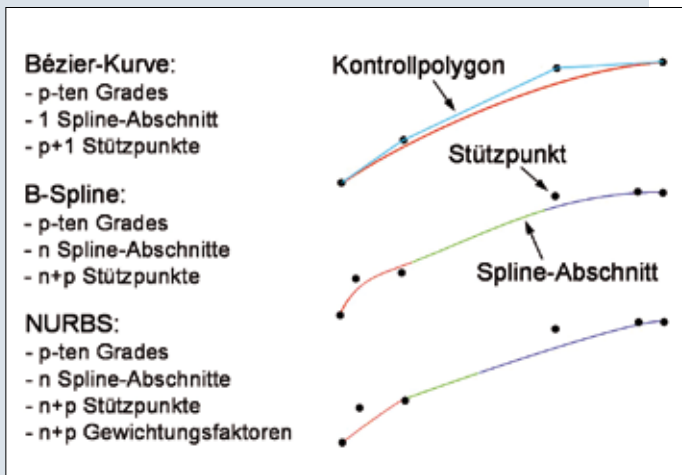
2.1 Bézier-Kurven

Generell werden Splines parametrisch definiert. So kann über einen einzigen Parameter u in einem geschlossenen Intervall $[a, b]$ eine zweidimensionale Spline-Kurve $C(u)$ in der gewünschten Koordinatenform (kartesisch, polar) abgelaufen werden:

$$C(u) = \begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix} \text{ oder } C(u) = \begin{pmatrix} \varphi(u) \\ R(u) \end{pmatrix} \quad u \in [a, b]. \quad (1)$$



2: Aufbau einer Rollenkette.



3: Parametrisierung verschiedener Spline-Typen.

Eine Bézier-Kurve $C(u)$ n -ten Grades zu gegebenen $n+1$ Stützpunkten P_i ist definiert als:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot P_i \quad u \in [0,1] \quad (2)$$

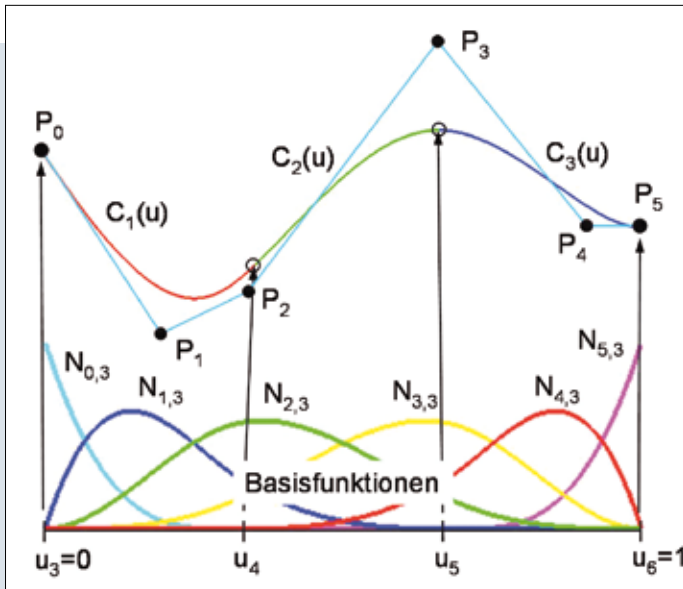
Dabei bilden die Basisfunktionen B_p , n das i -te Bernsteinpolynom n -ten Grades:

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \quad (3)$$

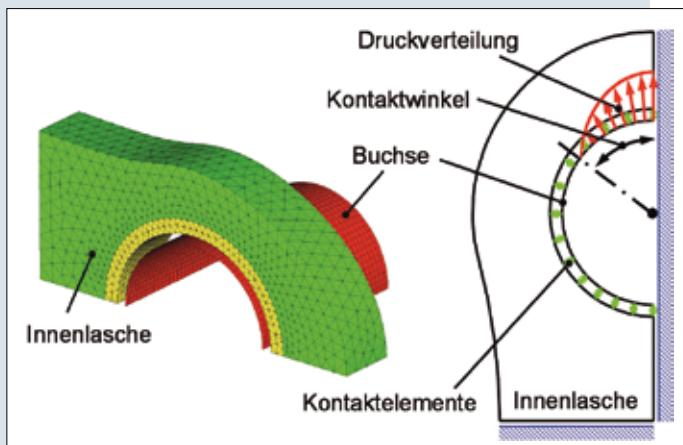
Die Bézier-Kurve geht genau durch die Endpunkte P_0 und P_n , jedoch in der Regel nicht durch die restlichen Stützpunkte. Die Verbindungslinien zwischen den ersten und letzten beiden Stützpunkten des Kontrollpolygons entsprechen den Endtangente (Bild 3). Bei Bézier-Kurven hängt der Grad der Basisfunktionen von der Anzahl der Stützpunkte ab. Polynome höherer Ordnung sind numerisch ineffizient zu bestimmen, werden mit zunehmenden Grad instabil und neigen zum ungewollten Überschwingen. Daher werden in der Praxis kubische Bézier-Kurven (3. Grades) verwendet. Diese sind jedoch nur für Optimierungen geeignet, wenn sich die optimale Geometrie durch vier Stützpunkte mit hinreichender Genauigkeit approximieren lässt. Eine Möglichkeit zu Erweiterung der Flexibilität ist die Verwendung von rationalen Bézier-Kurven:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(u) \cdot P_i}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(u)} \quad u \in [0,1]. \quad (4)$$

Veränderungen der Gewichtungen führen zum Anziehen bzw. Abstoßen der Kurve zu den jeweiligen Stützpunkten. Da die End-



4: Kubischer NURBS mit drei Kurvenabschnitten.



5: Parametrisches FEM-Modell der Innenlasche.

punkte auf der Bézier-Kurve selbst liegen, haben deren Gewichtungsfaktoren nur einen Einfluss auf die Normierung der Kurve. Bei Optimierungen mit rationalen Kurven sollten demnach die Gewichtungsfaktoren der Endpunkte konstant gesetzt werden, um ein System zu erhalten, das nicht überbestimmt ist. Wenn die Gewichtungsfaktoren der Endpunkte auf eins normiert sind, wird die Standardform einer rationalen Bézier-Kurve beschrieben.

2.2 B-Splines und NURBS

Zur Erhöhung der Flexibilität können die Bézier-Kurven an den Endpunkten zu den sogenannten B-Splines verknüpft werden. Der periodische Knotenvektor U eines B-Splines gibt mit den einzelnen Knotenpunkten u_i den Parameterbereich der stückweise definierten Polynome bzw. Bézier-Kurven p -ten Grades an:

$$U = \{u_0, \dots, u_{n+p+1}\} \quad a \leq u \leq b, \quad u_{i-1} < u_i < u_{i+1}. \quad (5)$$

Die Basisfunktionen der B-Splines werden wie bei den Bézier-Kurven mit den Stützpunkten P_i multipliziert und über die Anzahl der Stützpunkte aufsummiert:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad a \leq u \leq b. \quad (6)$$

Aus numerischen Gründen werden die Basisfunktionen rekursiv definiert:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i \leq u < u_{i+1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u). \quad (7)$$

Für einen B-Spline mit einem einzigen Spline-Abschnitt werden die Basisfunktionen zu Bernsteinpolynomen p -ten Grades. In diesem Fall handelt es sich also um eine Bézier-Kurve. Ähnlich wie bei den rationalen Bézier-Kurven können die B-Splines durch eine Gewichtung w_i der Stützpunkte eine höhere Flexibilität erhalten:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad a \leq u \leq b \quad (8)$$

Diese sogenannten NURBS (Bild 4) können somit auch kubische B-Splines, Bézier-Kurven und rationale Bézier-Kurven abbilden.

3 Gestaltoptimierung der Außenkontur einer Innenlasche

Für die Gestaltoptimierung wurde eine Rollenkette europäischer Bauart nach DIN 8187 gewählt [3]. Nach einem VDI-Bericht ist für die Bestimmung der Dauerfestigkeit von Kettenlaschen die von-Mises-Spannung im dreiachsigen Spannungszustand zu verwenden [4] und wurde daher als Optimierungsziel definiert.

3.1 Aufbau eines parametrischen FEM-Modells

Die Gestaltoptimierung basiert auf der Methode der Finiten Elemente (FEM). Dazu ist es notwendig, ein FEM-Modell zu entwickeln, welches sich in jedem Iterationsschritt der Optimierungsrechnung an die aktuelle Gestaltvariante anpasst. Aus diesem Grund wurde ein sogenanntes parametrisches FEM-Modell der Innenlasche entwickelt, das nach dem Neuaufbau des Geometriemodells automatisch angepasst wird.

Aufgrund des Rechenaufwands wurde das FEM-Modell sinnvoll abstrahiert (Bild 5). Zum einen wurden die Symmetrien vollständig genutzt, so dass nur ein Viertel der Innenlasche modelliert werden musste. Zum anderen wurde die Buchse nur als Flächenmodell erstellt und mit Kontaktelementen zur Innenlasche mit durchschnittlichem Übermaß vorgespannt. Dabei wurde auch die Oberflächenrauheit und die Reibung nach DIN 7190 für Pressverbände berücksichtigt [5].

Auf die Modellierung des Bolzens konnte verzichtet werden, da sich das mechanische Verhalten durch eine kosinusförmige Druckverteilung nach Dietz [6] beschreiben lässt. Demnach wird der Kontaktwinkel maßgeblich vom Spiel zwischen Bolzen und Buchse beeinflusst. Deshalb wird ausgehend vom mittleren Passungsspiel die Einschnürung der Buchse durch den Pressverband zur Innenlasche berücksichtigt. Für eine Bewertung der Dauerfestigkeit ist eine Ermittlung der Spannungen bei Ober- und Unterlast üblich. Zur Halbierung des Rechenaufwands wurde jedoch nur eine Testkraft als Lastfall definiert. Die Testkraft F_t ergibt nach ISO 15654 [7] aus der um die Unterlast F_{\min} korrigierten Oberlast F_{\max} :

$$F_t = \frac{F_u (F_{\max} - F_{\min})}{F_u - F_{\min}} \quad (9)$$

F_u entspricht hierbei der Mindestbruchkraft der Rollenkette nach DIN 8187.

3.2 Aufbau des Optimierungsmodells

Zur Beschreibung der Laschenkontur werden Splines verwendet, die über eine Vielzahl von Parametern (Stützpunkte, Gewichtung der Stützpunkte) stark variiert werden können. Um den Lösungs-

raum der Freiformgeometrien auf den zulässigen Bereich zu beschränken, muss der Spline in einem Unterprogramm auf Verletzung geometrischer Restriktionen überprüft werden (Bild 6).

Eine wichtige geometrische Beschränkung ergibt sich aus der DIN 8187. Demnach darf die Innenlasche eine maximale Kopfüberhöhung nicht überschreiten. Zudem sollte die Außenkontur nicht den Buchsendurchmesser schneiden. Um die Beweglichkeit der Kettenlieder zueinander zu ermöglichen, muss die Wangenbreite kleiner als die Teilungshälfte sein. Durch die geometrischen Restriktionen kann aber auch der Lösungsraum sinnvoll reduziert werden. Eine Begrenzung der Krümmung führt bereits vor der FEM-Berechnung zu einem Ausschluss hoher Spannungsspitzen an der Außenkontur der Innenlasche. Des Weiteren wird durch die Definition einer Hinterschneidungsfreiheit in y-Richtung der Suchraum verkleinert und eine Selbstdurchdringung der Spline-Kurve vermieden.

Um den Wertebereich der Geometrieparameter besser einschränken zu können, werden statt der Stützstellen die Endpunkte der Spline-Abschnitte verändert. Diese Parameter werden durch ein Interpolationsverfahren in die Stützstellen umgerechnet. Dabei werden die Tangenten und Teilpositionen vom ersten und letzten Interpolationspunkt auf den Symmetrieebenen fixiert.

3.3 Optimierungsergebnisse bei verschiedenen Spline-Typen

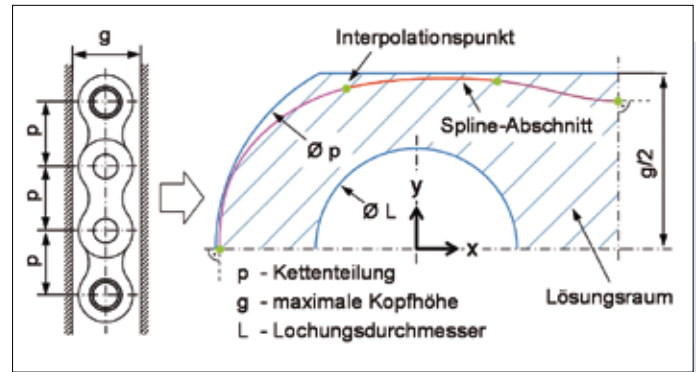
Die Innenlaschen wurden mit den verschiedenen Spline-Typen parametrisiert und bezüglich der Maximalspannung nach von Mises optimiert. Im Vergleich zu einer üblichen Laschenform mit Radien konnten in allen Optimierungsläufen die Spannungen deutlich gesenkt werden (Bild 7). Eine Beschränkung des Laschengewichtes auf die übliche Laschenform mit Radien durch die Definition einer Masserestriktion führte nur zu einer geringfügigen Verringerung der Optimierungserfolge.

Bei der Konvergenzanalyse in Bild 7 wurde die Anzahl der Interpolationspunkte für kartesisch definierte B-Splines und für kartesisch definierte NURBS in Standardform schrittweise erhöht. Für den Sonderfall von zwei Interpolationspunkten handelt es sich um Bézier bzw. rationale Bézier-Kurven. Unabhängig von der Definition einer Masserestriktion konnte mit vier Interpolationspunkten die optimale Geometrie am besten approximiert werden. Eine höhere Anzahl von Interpolationspunkten führte zu schlechteren Ergebnissen, da durch die unnötig höhere Flexibilität nur die Dimension des Optimierungsproblems gesteigert wurde, wodurch der Optimierungsalgorithmus das Optimum schwerer bestimmen konnte.

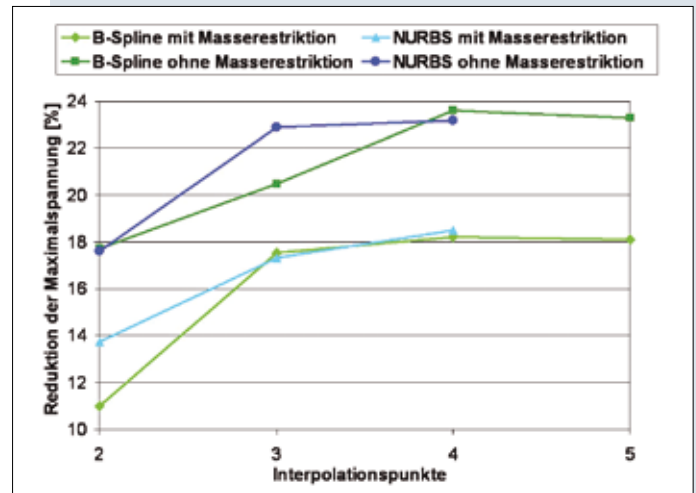
Da NURBS mit fünf Interpolationspunkten eine noch höhere Flexibilität aufweisen, wurde hierzu keine Optimierungsrechnung durchgeführt. Aufgrund der Gewichtungsfaktoren der NURBS muss der Optimierungsalgorithmus anderthalb Mal so viele Optimierungsparameter einstellen. Dadurch konnten mit B-Splines teilweise bessere Ergebnisse erzielt werden. Zudem fiel bei B-Splines der Rechenaufwand deutlich geringer aus. Dafür reagierten B-Splines empfindlicher auf eine zu geringe Anzahl an Interpolationspunkten.

Aber auch bei NURBS konnten ähnlich wie bei den B-Splines (Bild 8) nicht die für eine optimale Gestalt notwendigen Wendepunkte ausgebildet werden, wenn zu wenige Interpolationspunkte vorlagen. Die Wendepunkte der optimierten Laschenformen in Bild 8 liegen sogar oft in der Nähe der Interpolationspunkte. Nur bei schwachen Krümmungen konnte ohne Interpolationspunkt ein Wendepunkt ausgebildet werden. Sollten demnach Spline-Abschnitte nach der Optimierung schwach gekrümmt sein und keinen Wendepunkt enthalten, wäre eine neue Optimierungsrechnung mit entsprechend geringer Interpolationspunktzahl sinnvoll.

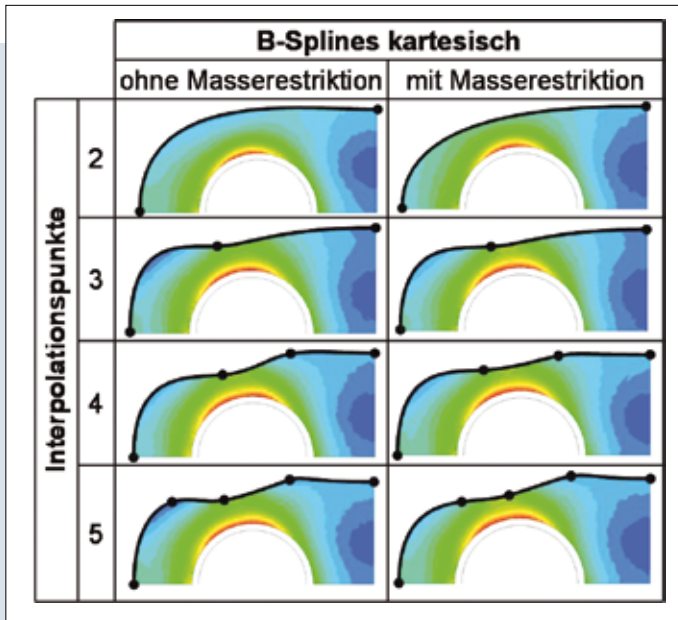
In einer weiteren Optimierungsreihe wurden gezielt die verschiedenen Parametrisierungsformen von NURBS untersucht. Ein Vergleich der Laschenformen in Bild 9 zeigt, dass der Gestaltungsfreiraum für eine optimale Außenkontur ohne Masserestriktion sehr groß ist. Auffällig ist beispielsweise der große Unterschied zwischen den in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten definierten NURBS in Standardform mit nahezu identischem Optimierungserfolg. Der Entfall unnötiger Gewichtungen durch die Verwendung



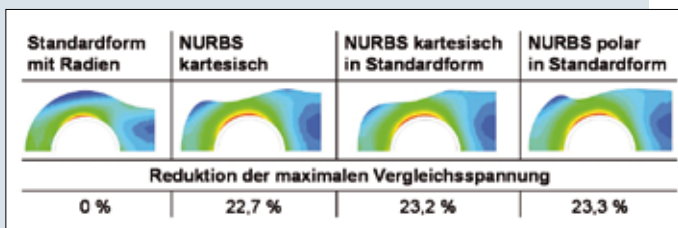
6: Lösungsraum für die Außenkontur einer Innenlasche.



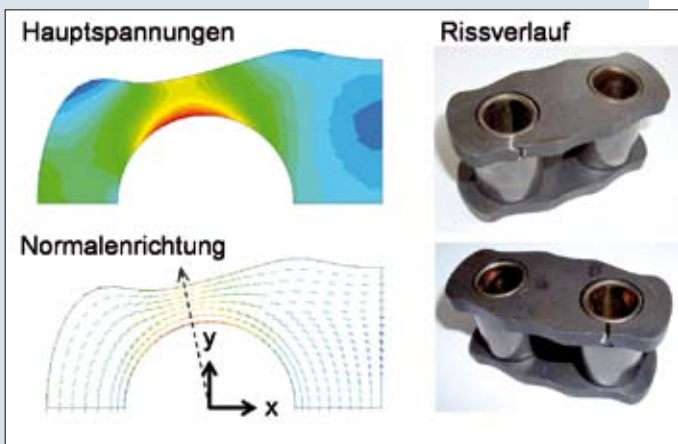
7: Konvergenzanalyse mit kartesischen Splines.



8: Optimierte Laschenformen mit deren Spannungsverteilungen.



9: Optimierte Laschen bei vier Interpolationspunkten.



10: Vergleich zwischen Rissverlauf und Hauptspannungen.

von NURBS in Standardform hatte erwartungsgemäß eine geringere Berechnungszeit und eine leichte Verbesserung des Optimierungsergebnisses zur Folge.

Im Gegensatz zur Standardform mit Radien ist bei den besten Lösungen das Gebiet mit den höchsten Spannungen über den Großteil der Lochung verteilt (Bild 9). Gemäß dem Fully-stressed-design-Kriterium stellt dies eine erfüllte Optimalitätsbedingung dar. Eine Optimierung mit einem Optimalitätskriterium wäre aber in diesem Fall nicht zielführend, da hierfür ein Resizing-Algorithmus erforderlich wäre, der das Material an den höchst belasteten Stellen verstärken würde. Bei den optimalen Lösungen wird jedoch ersichtlich, dass sich der schmalste Querschnitt entgegen den Erwartungen an der höchst beanspruchten Position ausgebildet hat. Daher wurde zur Validierung der Optimierungsergebnisse eine

Dauerfestigkeitsuntersuchung nach ISO 15654 der mit kartesischen NURBS optimierten Innenlaschen ohne Masserestriktion durchgeführt. Hierbei konnte eine Erhöhung der gemittelten Dauerfestigkeit um 15 % nachgewiesen werden. Allerdings bestehen bei der gemittelten Dauerfestigkeit nur durchschnittlich 50 % der Laschen die vorgegebene Testkraft. Für eine Überlebenswahrscheinlichkeit von 99,865 % ergab sich nur eine geringfügige Verbesserung, was auf einen erheblichen Einfluss der Streuung von Materialfestigkeit, Oberflächengüte und der Passungstoleranzen zurückzuführen ist.

Die Optimierungen wurden unter der Annahme durchgeführt, dass die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) auf die Innenlaschen zutrifft. Entgegen einem VDI-Bericht [4] konnte jedoch in den Versuchsreihen zur Ermittlung der Dauerfestigkeit festgestellt werden, dass die Normalspannungshypothese (NH) das Festigkeitsverhalten besser beschreiben kann. Die Normalspannungshypothese setzt voraus, dass der Bruch senkrecht zur Richtung der größten Hauptspannung erfolgt [1]. In Bild 10 wird dieses spröde Werkstoffverhalten der vergüteten Innenlaschen deutlich. Dementsprechend könnte durch eine Minimierung der Hauptspannungen die Dauerfestigkeit der Innenlaschen weiter verbessert werden.

4 Zusammenfassung

Eine Konvergenzanalyse mit verschiedenen Spline-Typen zur Parametrisierung der Außenkontur der Innenlaschen einer Rollenkette zeigte, dass zur Approximation der optimalen Gestalt vier Interpolationspunkte gewählt werden sollten. Die Flexibilität von B-Splines erwies sich als hinreichend. Im Vergleich zu NURBS waren aufgrund der geringeren Anzahl an Optimierungsparametern zudem weniger FEM-Berechnungen erforderlich. Die Spannungen in den Innenlaschen einer Rollenkette konnten durch die Gestaltoptimierung deutlich gesenkt werden. Dabei wurden die geometrischen Anforderungen aus Funktion und Normung eingehalten. Dauerfestigkeitsuntersuchungen bestätigten die verbesserte Dauerfestigkeit des Optimums.

Allerdings weist das Optimum eine geringe Wandstärke im Bereich der Lochung für die Buchse auf. Das Stanzen würde somit stark erschwert werden. In weiteren Optimierungsrechnungen wird daher der Lochungsdurchmesser so vergrößert, dass eine Mindestwandstärke für das Stanzen eingehalten wird. Zusätzlich soll eine andere Spannungshypothese für die Optimierung angenommen werden. Anschließend sollen die Auswirkungen auf die Dauerfestigkeit versuchstechnisch ermitteln werden.

Danksagung

Die hier vorgestellten Arbeiten werden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Projektes „Optimierung des strukturellen Verhaltens von Maschinenbauteilen durch parametergestützte Variation von Freiformgeometrien mit geometrischen Restriktionen“ gefördert. Die Dauerfestigkeitsuntersuchungen wurden in Zusammenarbeit mit der Firma Wippermann jr. GmbH durchgeführt.

Literaturhinweise:

- [1] Muhs, D.; Wittel, H.; Jannasch, D.; Vossiek, J.: *Roloff/Matek Maschinenelemente*. Vieweg, Braunschweig 2007.
- [2] Schumacher, A.: *Optimierung mechanischer Strukturen. Grundlagen und industrielle Anwendungen*. Springer-Verlag, Heidelberg 2005.
- [3] N. N.: *DIN 8187 - Rollenketten Europäischer Bauart*. Beuth-Verlag, Berlin 1996.
- [4] Vogt, E.; Ragnitz, D.: *Dauerfestigkeit von Rollenketten - ein Qualitätsmerkmal. Prüfverfahren nach der neuen Norm ISO/FDIS 15654 und Vergleich mit FEM Rechnungen*. Springer-VDI-Verlag, VDI-Berichte 2003, Nr. 1758, S. 233-246.
- [5] N. N.: *DIN 7190 - Pressverbände. Berechnungsgrundlagen und Gestaltungsregeln*. Beuth-Verlag, Berlin 2001.
- [6] Dietz, P.; Rothe, F.: *Berechnung und Optimierung von Bolzen-Lasche-Verbindungen*. IMW-Institutsmittteilung (1994), Nr. 19, S. 5-26.
- [7] N. N.: *ISO 15654 - Fatigue test method for transmission precision roller chains*. Beuth-Verlag, Berlin 2004.